

## Bab 6

# TEOREMA DIVERGENSI, TEOREMA STOKES DAN TEOREMA INTEGRAL YANG BERKAITAN

**TEOREMA DIVERGENSI GAUSS** menyatakan bahwa jika  $V$  adalah volume yang dibatasi oleh suatu permukaan tertutup  $S$  dan  $\mathbf{A}$  sebuah vektor yang adalah fungsi dari kedudukan dengan turunan-turunan yang kontinu, maka

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

di mana  $\mathbf{n}$  adalah normal positif (digambarkan ke arah luar) dari  $S$ .

**TEOREMA STOKES** menyatakan bahwa jika  $S$  adalah suatu permukaan terbuka bersisi-dua yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup  $C$  yang tidak memotong dirinya (kurva tertutup sederhana) maka jika  $\mathbf{A}$  memiliki turunan-turunan kontinu

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

di mana  $C$  dilintasi dalam arah positif. Arah dari  $C$  disebut *positif* jika seorang pengamat, berjalan pada daerah batas dari  $S$  dalam arah ini dengan kepalanya menunjuk pada arah normal positif terhadap  $S$ , maka ia mendapatkan permukaan ini disebelah kirinya.

**TEOREMA GREEN DALAM BIDANG.** Jika  $R$  adalah suatu daerah tertutup dalam bidang  $xy$  yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana  $C$  dan jika  $M$  dan  $N$  adalah fungsi-fungsi kontinu dari  $x$  dan  $y$  yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam  $R$ , maka

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy$$

di mana  $C$  dilintasi dalam arah positif (berlawanan arah putaran jarum jam). Bila tidak ada pernyataan lain, kita akan selalu menganggap  $\oint$  berarti bahwa integrasinya dimaksudkan dalam arah positif.

Teorema Green dalam bidang adalah hal khusus dari teorema Stokes (lihat Soal 4). Juga, menarik untuk diketahui bahwa teorema divergensi Gauss adalah perluasan teorema Green dalam bidang di mana (bidangnya) daerah  $R$  dan batasnya yang tertutup (kurva)  $C$  diganti oleh suatu daerah (ruang)  $V$  dan batasnya yang tertutup (permukaan)  $S$ . Berdasarkan alasan ini teorema divergensi seringkali disebut *teorema Green dalam ruang* (lihat Soal 4).

Teorema Green dalam bidang juga berlaku untuk daerah-daerah yang dibatasi oleh sejumlah berhingga kurva-kurva sederhana yang tidak berpotongan (lihat Soal-soal 10 dan 11).

## TEOREMA-TEOREMA INTEGRAL YANG BERKAITAN

$$1. \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

Ini disebut *teorema identitas Green pertama*

$$2. \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

Ini disebut *teorema identitas Green kedua atau teorema simetris*. Lihat Soal 21.

$$3. \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS = \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

Perhatikan bahwa disini perkalian titik dari teorema divergensi Green diganti dengan perkalian silang. Lihat Soal 23.

$$4. \oint_C \phi d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla \phi) dS = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi$$

5. Misalkan  $\psi$  menyatakan sebuah fungsi vektor atau skalar bergantung pada apakah simbol  $\circ$  menyatakan sebuah titik atau tanda silang atau suatu perkalian silang. Maka

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \circ \psi dV &= \iint_S \mathbf{n} \circ \psi dS = \iint_S d\mathbf{S} \circ \psi \\ \oint_C d\mathbf{r} \circ \psi &= \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \circ \psi dS = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \circ \psi \end{aligned}$$

Teorema divergensi Gauss, teorema Stokes dan teorema-teorema 3 dan 4 adalah kasus-kasus khusus dari teorema-teorema ini. Lihat Soal-soal 22, 23 dan 34.

**BENTUK OPERATOR INTEGRAL UNTUK  $\nabla$ .** Adalah menarik untuk mempergunakan terminologi dari Soal 19, bahwa operator  $\nabla$  dapat dinyatakan secara simbolik dalam bentuk

$$\nabla \circ = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ$$

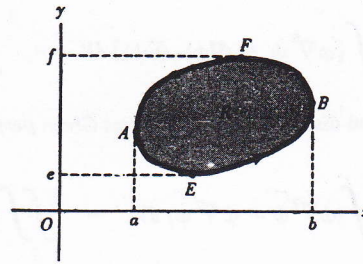
dimana  $\circ$  menyatakan sebuah titik, tanda silang atau perkalian biasa (lihat Soal 25). Pernyataan di atas terbukti bermanfaat dalam memperluas konsep-konsep gradien, divergensi dan curl kedalam sistem-sistem koordinat lain dari pada sistem koordinat tegak lurus (lihat Soal-soal 19, 24 dan juga Bab 7).

## Soal-soal yang Dipecahkan

### TEOREMA GREEN DALAM BIDANG

1. Buktikan teorema Green dalam bidang jika  $C$  adalah sebuah kurva tertutup yang memiliki sifat bahwa sebarang garis lurus yang sejajar sumbu-sumbu koordinat memotong  $C$  paling banyak pada dua buah titik.

Misalkan persamaan kurva-kurva  $AEB$  dan  $AFB$  (lihat gambar di samping) adalah masing-masing  $y = y_1(x)$  dan  $y = y_2(x)$ . Jika  $R$  adalah daerah yang dibatasi oleh  $C$ , kita peroleh



$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx dy &= \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right] dx = \int_{x=a}^b M(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx = \int_a^b [M(x, y_2) - M(x, y_1)] dx \\ &= - \int_a^b M(x, y_1) dx - \int_b^a M(x, y_2) dx = - \oint_C M dx \end{aligned}$$

Maka

$$(1) \quad \oint_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx dy$$

Dengan cara yang sama, misalkan persamaan-persamaan kurva  $EAF$  dan  $EBF$  adalah masing-masing  $x = X_1(y)$  dan  $x = X_2(y)$ . Maka

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_{y=e}^f \left[ \int_{x=X_1(y)}^{x=X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx \right] dy = \int_e^f [N(X_2, y) - N(X_1, y)] dy \\ &= \int_f^e N(X_1, y) dy + \int_e^f N(X_2, y) dy = \oint_C N dy \end{aligned}$$

Maka

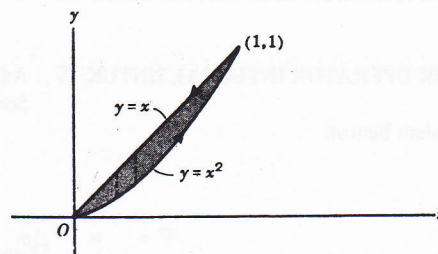
$$(2) \quad \oint_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy$$

Jumlahkan (1) dan (2),  $\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$ .

2. Buktikan teorema Green dalam bidang untuk

$\oint_C (xy + y^2) dx + x^2 dy$  di mana  $C$  adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh  $y = x$  dan  $y = x^2$ .

$y = x$  dan  $y = x^2$  berpotongan di  $(0, 0)$  dan  $(1, 1)$ . Arah positif dalam melintasi  $C$  seperti yang diperlihatkan dalam gambar di samping.



Sepanjang  $y = x^2$ , integral garisnya sama dengan

$$\int_0^1 (x)(x^2) dx + \int_0^1 (x^2)(2x) dx = \int_0^1 (3x^3 + x^4) dx = \frac{19}{20}$$



Sepanjang  $y = x$  dari  $(1, 1)$  hingga  $(0, 0)$  integral garisnya

$$\int_1^0 ((x)(x) + x^2) dx + x^2 dx = \int_1^0 3x^2 dx = -1$$

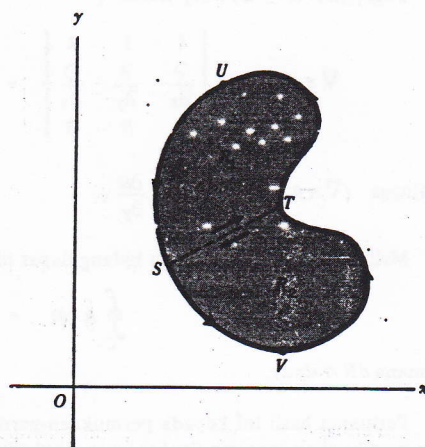
Maka integral lintasan yang dicari =  $\frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) \right] dx dy \\ &= \iint_R (x - 2y) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (x - 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^x (x - 2y) dy \right] dx = \int_0^1 (xy - y^2) \Big|_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 (x^4 - x^3) dx = -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

sehingga dengan demikian terbukti teoremanya.

3. Perluaslah pembuktian teorema Green dalam bidang yang diberikan dalam Soal 1 untuk kurva-kurva  $C$  untuk mana garis-garis yang sejajar sumbu-sumbu koordinat memotong  $C$  pada lebih daripada dua titik.

Pandang sebuah kurva tertutup  $C$  seperti diperlihatkan dalam gambar disamping, dalam mana garis-garis yang sejajar sumbu-sumbu koordinat memotong  $C$  pada lebih daripada dua titik. Dengan membuat garis  $ST$ , maka daerah yang ditinjau terbagi kedalam dua buah daerah  $R_1$  dan  $R_2$  yang tergolong kepada jenis yang ditinjau dalam Soal 1 dan yang mana berlaku teorema Green, yakni



$$(1) \int_{STUS} M dx + N dy = \iint_{R_1} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

$$(2) \int_{SVTS} M dx + N dy = \iint_{R_2} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Jumlahkan ruas-ruas kiri dari (1) dan (2), maka, dengan mengabaikan integrand  $M dx + N dy$  dalam setiap kasus, kita peroleh

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

di mana telah dipergunakan kenyataan bahwa  $\int_{ST} = -\int_{TS}$

Jumlahkan ruas-ruas kanan dari (1) dan (2), dan abaikan pula integrandnya,

$$\iint_{R_1} + \iint_{R_2} = \iint_R$$

di mana  $R$  terdiri atas daerah-daerah  $R_1$  dan  $R_2$ .



Maka  $\int_{TUSVT} M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$  dan dengan demikian terbukti teoremanya.

Daerah  $R$  seperti yang ditinjau di sini dan dalam Soal 1, untuk mana sebarang kurva tertutup yang terletak dalam  $R$  dapat disusutkan secara kontinu ke sebuah titik tanpa meninggalkan  $R$ , disebut suatu daerah terhubung-sederhana (*simply-connected region*). Daerah yang tak terhubung sederhana disebut terhubung-lipat-ganda (*multiply-connected*). Disini telah kita perhatikan bahwa teorema Green dalam bidang berlaku untuk daerah-daerah terhubung-sederhana yang dibatasi oleh kurva-kurva tertutup. Dalam Soal 10, teorema ini diperluas untuk daerah-daerah terhubung-lipat-ganda.

Untuk daerah-daerah terhubung-sederhana yang lebih rumit, perlu dibuat lebih banyak garis-garis, seperti  $ST$ , untuk membuktikan teoremanya.

#### 4. Nyatakan teorema Green dalam bidang dalam notasi vektor.

Kita memperoleh  $M dx + N dy = (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ , di mana,  $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$

dan  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  sehingga  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ .

Juga, jika  $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  maka

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Sehingga  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ .

Maka teorema Green dalam bidang dapat dituliskan

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} dR$$

di mana  $dR = dxdy$

Perluasan hasil ini kepada permukaan-permukaan  $S$  dalam ruang yang memiliki kurva  $C$  sebagai batasnya memberikan teorema Stokes yang dibuktikan dalam Soal 31.

Metode lain.

Seperti di atas,  $M dx + N dy = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} ds$ ,

di mana  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}$  = vektor singgung satuan pada

$C$  (lihat gambar di samping). Jika  $\mathbf{n}$  adalah normal satuan dengan arah keluar pada  $C$ , maka  $\mathbf{T} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}$  sehingga

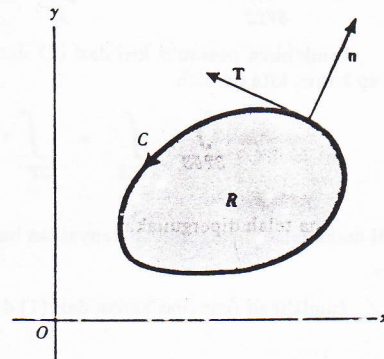
$$M dx + N dy = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} ds = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{n}) ds = (\mathbf{A} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} ds$$

Karena  $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{k} = (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$  dan

$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{B}$ . Maka teorema Green dalam bidang menjadi

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{B} dR$$

di mana  $dR = dxdy$ .



Perluasan hasil ini ke dalam hal di mana diferensial panjang busur  $ds$  dari sebuah kurva tertutup  $C$  diganti dengan diferensial luas permukaan  $dS$  dari sebuah permukaan tertutup  $S$ , dan daerah bidang  $R$  yang bersangkutan yang dibatasi oleh  $C$  diganti dengan volume  $V$  yang dibatasi oleh  $S$ , memberikan *teorema divergensi Gauss* atau *teorema Green dalam ruang*.

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV$$

5. Interpretasikan secara fisis hasil pertama dari Soal 4.

Bila  $\mathbf{A}$  menyatakan medan gaya yang bekerja pada sebuah partikel, maka  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  adalah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan partikel tersebut mengelilingi suatu lintasan tertutup  $C$  dan ditentukan oleh harga  $\nabla \times \mathbf{A}$ . Dari sini, untuk hal khusus di mana jika  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  atau ekuivalen dengan  $\mathbf{A} = \nabla \phi$ , maka integral mengelilingi suatu lintasan tertutup adalah nol. Ini sama artinya dengan mengatakan bahwa usaha yang dilakukan dalam menggerakkan partikel dari satu titik dalam bidang ke titik lain tak bergantung pada lintasan dalam bidang yang menghubungkan titik-titik ini atau medan gaya adalah konservatif. Hasil-hasil ini telah diperlihatkan untuk medan-medan gaya dan kurva-kurva dalam ruang (lihat Bab 5).

Sebaliknya, jika integralnya tak bergantung pada lintasan yang menghubungkan dua buah titik sebarang dari suatu daerah, yang berarti jika integral mengelilingi sebarang kurva tertutup adalah nol, maka

$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Dalam bidang, persyaratan  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  ekuivalen dengan persyaratan  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  di mana  $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ .

6. Hitunglah  $\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3) \, dx - 3x^2y^2 \, dy$  sepanjang lintasan  $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ .

Perhitungan secara langsung adalah sulit. Walaupun demikian, dengan mengingat bahwa  $M = 10x^4 - 2xy^3$

$$N = -3x^2y^2 \text{ dan } \frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

maka dari sini diperoleh bahwa integralnya tak bergantung pada lintasan.

Maka kita dapat mempergunakan sebarang lintasan, misalnya lintasan yang terdiri atas potongan-potongan garis-lurus dari  $(0, 0)$  ke  $(2, 0)$  dan kemudian dari  $(2, 0)$  ke  $(2, 1)$ .

Sepanjang lintasan garis lurus dari  $(0, 0)$  ke  $(2, 0)$ ,  $y = 0$ ,  $dy = 0$  dan integralnya sama-dengan

$$\int_{x=0}^2 10x^4 \, dx = 64.$$

Sepanjang lintasan garis lurus dari  $(2, 0)$  ke  $(2, 1)$ ,  $x = 2$ ,  $dx = 0$  dan integralnya sama-dengan

$$\int_{y=0}^1 -12y^2 \, dy = -4.$$

Maka harga dari integral garis yang diinginkan  $= 64 - 4 = 60$ .

*Metode lain.*

Karena  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ,  $(10x^4 - 2xy^3) \, dx - 3x^2y^2 \, dy$  adalah suatu diferensial eksak (dari  $2x^5 - x^2y^3$ ).

Maka

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3) \, dx - 3x^2y^2 \, dy = \int_{(0,0)}^{(2,1)} d(2x^5 - x^2y^3) = 2x^5 - x^2y^3 \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 60$$

7. Perlihatkan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana  $C$  diberikan oleh

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

Ambilkan  $M = -y$ ,  $N = x$  dalam teorema Green. Maka

$$\oint_C x dy - y dx = \iint_R \left( \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dx dy = 2 \iint_R dx dy = 2A$$

di mana  $A$  adalah luas yang diinginkan. Jadi  $A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$ .

8. Carilah luas dari elips  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} \text{Luas} &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta)(b \cos \theta) d\theta - (b \sin \theta)(-a \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

9. Hitunglah  $\oint_C (y - \sin x) dx + \cos x dy$ , di mana  $C$

adalah segitiga dari gambar di samping:

- (a) secara langsung  
(b) menggunakan teorema Green dalam bidang.

- (a) Sepanjang  $OA$ ,  $y = 0$ ,  $dy = 0$  dan integralnya sama-dengan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (0 - \sin x) dx + (\cos x)(0) &= \int_0^{\pi/2} -\sin x dx \\ &= \cos x \Big|_0^{\pi/2} = -1 \end{aligned}$$

Sepanjang  $AB$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $dx = 0$  dan integralnya sama-dengan

$$\int_0^1 (y-1)0 + 0 dy = 0$$

Sepanjang  $BO$ ,  $y = \frac{2x}{\pi}$ ,  $dy = \frac{2}{\pi} dx$  dan integralnya sama-dengan

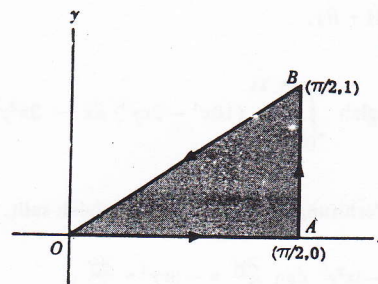
$$\int_{\pi/2}^0 \left( \frac{2x}{\pi} - \sin x \right) dx + \frac{2}{\pi} \cos x dx = \left( \frac{x^2}{\pi} + \cos x + \frac{2}{\pi} \sin x \right) \Big|_{\pi/2}^0 = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$$

Maka integral sepanjang  $C = -1 + 0 + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$ .

- (b)  $M = y - \sin x$ ,  $N = \cos x$ ,  $\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin x$ ,  $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$  dan

$$\begin{aligned} \oint_C M dx + N dy &= \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R (-\sin x - 1) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{\pi/2} \left[ \int_{y=0}^{2x/\pi} (-\sin x - 1) dy \right] dx = \int_{x=0}^{\pi/2} (-y \sin x - y) \Big|_0^{2x/\pi} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( -\frac{2x}{\pi} \sin x - \frac{2x}{\pi} \right) dx = -\frac{2}{\pi} (-x \cos x + \sin x) - \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

sesuai dengan bagian (a).

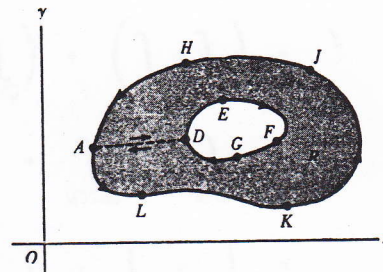




Perhatikan bahwa meskipun terdapat garis-garis yang sejajar sumbu-sumbu koordinat (berimpit dengan sumbu-sumbu koordinat dalam hal ini) yang memotong  $C$  dalam *tak berhingga* banyaknya titik-titik, teorema Green dalam bidang tetap berlaku. Pada umumnya, teorema ini berlaku bila  $C$  tersusun oleh sejumlah berhingga potongan-potongan garis lurus.

10. Perhatikan bahwa teorema Green dalam bidang juga berlaku untuk daerah terhubung-lipat-ganda  $R$  seperti yang diperlihatkan dalam gambar di bawah ini.

Daerah berbayangan  $R$  yang diperlihatkan di bawah, adalah terhubung-lipat-ganda karena tidak setiap kurva tertutup yang terletak dalam  $R$  dapat disusutkan ke suatu titik tanpa meninggalkan  $R$ , yang dapat diamati dengan misalnya memandang sebuah kurva yang mengelilingi  $DEFGD$ . Batas dari  $R$ , yang terdiri dari batas luar  $AHJKLA$  dan batas dalam  $DEFGD$ , dilintasi dalam arah positif, sehingga seseorang yang berjalan menurut arah ini selalu mendapatkan bahwa daerah  $R$  disebelah kirinya. Terlihat bahwa arah-arah positif adalah arah-arah yang ditunjukkan dalam gambar disamping.



Untuk membuktikan teorema ini, buatlah sebuah garis, seperti  $AD$ , yang disebut sebuah *penyilang* (*cross-cut*), yang menghubungkan batas-batas luar dan dalam. Daerah yang dibatasi oleh  $ADEFGDAL-KJHA$  adalah terhubung-sederhana dan dengan demikian berlaku teorema Green. Maka

$$\oint_{ADEFGDAL-KJHA} M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

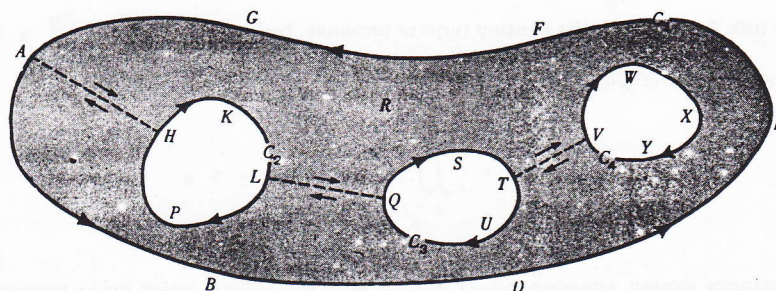
Tetapi integral disebelah kiri, dengan mengabaikan integrannya, sama dengan

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

karena  $\int_{AD} = -\int_{DA}$ . Jadi jika kurva  $C_1$  adalah kurva  $ALKJHA$ ,  $C_2$  kurva  $DEFGD$  dan  $C$  adalah batas dari  $R$  yang terdiri atas  $C_1$  dan  $C_2$  (dilintasi dalam arah positif), maka  $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C$  dan dengan demikian

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

11. Perhatikan bahwa teorema Green dalam bidang berlaku untuk daerah  $R$ , dari gambar dibawah, yang dibatasi oleh kurva-kurva sederhana  $C_1$  ( $ABDEFGA$ ),  $C_2$  ( $HKLPH$ ),  $C_3$  ( $QSTUQ$ ) dan  $C_4$  ( $VWXYV$ ).



Buatkan penyilang-penyilang  $AH$ ,  $LQ$  dan  $TV$ . Maka daerah yang dibatasi oleh  $AHKLQSTVWXYVTU-QLPHABDEFGA$  adalah terhubung-sederhana sehingga teorema Green berlaku. Integral melalui batas ini sama-dengan

$$\int_{AH} + \int_{HKL} + \int_{LQ} + \int_{QST} + \int_{TV} + \int_{VWXYV} + \int_{VT} + \int_{TUQ} + \int_{QL} + \int_{LPH} + \int_{HA} + \int_{ABDEFGA}$$

Karena integral-integral sepanjang  $AH$  dan  $HA$ ,  $LQ$  dan  $QL$ ,  $TV$  dan  $VT$  secara berpasangan saling mengha-puskan, integral ini menjadi

$$\begin{aligned} & \int_{HKL} + \int_{QST} + \int_{VWXYV} + \int_{TUQ} + \int_{LPH} + \int_{ABDEFGA} \\ &= \left( \int_{HKL} + \int_{LPH} \right) + \left( \int_{QST} + \int_{TUQ} \right) + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA} \\ &= \int_{HKLPH} + \int_{QSTUQ} + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA} \\ &= \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_1} = \int_C \end{aligned}$$

di mana  $C$  adalah batasnya yang terdiri atas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , dan  $C_4$ . Maka

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

sebagaimana dikehendaki.

12. Buktikan bahwa  $\oint_C M dx + N dy = 0$  mengelilingi sebarang kurva tertutup  $C$  dalam suatu daerah terhu-bung sederhana jika dan hanya jika  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  di semua titik dalam daerah itu.

Anggaplah  $M$  dan  $N$  kontinu dan memiliki turunan-turunan parsial kontinu di semua titik dalam daerah  $R$  yang dibatasi oleh  $C$ , sehingga teorema Green berlaku. Maka

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Jika  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  dalam  $R$ , maka jelas  $\oint_C M dx + N dy = 0$ .

Sebaliknya, andaikan  $\oint_C M dx + N dy = 0$ , untuk semua kurva-kurva  $C$ . Jika  $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0$  pada sebuah titik  $P$ , maka dari sifat kontinu turunan-turunnya, berlaku bahwa  $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0$  dalam bebe-rapa daerah  $A$  yang mengelilingi  $P$ . Bila  $\Gamma$  adalah batas dari  $A$  maka

$$\oint_{\Gamma} M dx + N dy = \iint_A \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy > 0$$

yang bertentangan dengan anggapan bahwa integral garis mengelilingi setiap kurva tertutup adalah nol.

Dengan cara yang sama, anggapan  $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} < 0$  menghasilkan suatu kontradiksi. Jadi  $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$  pada semua titik.

Perhatikan bahwa persyaratan  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  ekuivalen dengan  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  di mana  $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  (lihat Soal-soal 10 dan 11, Bab 5). Untuk perluasannya pada kurva-kurva dalam ruang, lihat Soal 31.

13. Misalkan  $\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ . (a) Hitunglah  $\nabla \times \mathbf{F}$ . (b). Hitunglah  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  mengelilingi sebarang kurva tertutup dan jelaskan hasilnya.

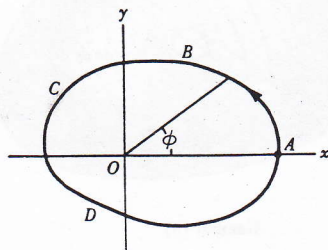
$$(a) \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \text{ dalam sebarang daerah tidak termasuk } (0, 0).$$

$$(b) \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}. \text{ Misalkan } x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, \text{ di mana } (\rho, \phi) \text{ adalah koordinat-koordinat polar. Maka}$$

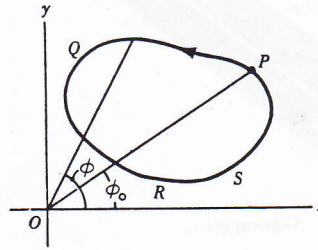
$$dx = -\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi, dy = \rho \cos \phi d\phi + d\rho \sin \phi$$

$$\text{dan dengan demikian } \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = d\phi = d(\arctan \frac{y}{x}).$$

Untuk sebuah kurva tertutup  $ABCD$  (lihat Gambar (a) di bawah) yang mengelilingi titik asal,  $\phi = 0$  di  $A$  dan  $\phi = 2\pi$  setelah melakukan satu lintasan lengkap kembali di  $A$ . Dalam hal ini integral garis sama dengan  $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ .



Gambar (a)



Gambar (b).

Untuk sebuah kurva tertutup  $PQRSP$  (lihat Gambar (b) di atas) yang tidak mengelilingi titik-asal,  $\phi = \phi_0$  di  $P$  dan  $\phi = \phi_0$  setelah melakukan satu lintasan lengkap kembali di  $P$ . Dalam hal ini integral garis sama-dengan  $\int_{\phi_0}^{\phi_0} d\phi = 0$ .

Karena  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ ,  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  ekuivalen dengan  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  maka hasilnya tampak bertentangan dengan hasil dari Soal 12. Walaupun demikian, tidak terdapat kontradiksi karena  $M = \frac{-y}{x^2+y^2}$  dan  $N = \frac{x}{x^2+y^2}$  tidak memiliki turunan-turunan yang kontinu di seluruh sebarang daerah yang mengandung  $(0, 0)$ , dan ini dianggap berlaku dalam Soal 12.

## TEOREMA DIVERGENSI

14. (a) Nyatakan teorema divergensi dalam kata-kata dan (b) tuliskan dalam bentuk koordinat-koordinat tegak-lurus.



(a) Integral permukaan dari komponen normal sebuah vektor  $\mathbf{A}$  mengelilingi sebuah permukaan tertutup sama dengan integral dari divergensi  $\mathbf{A}$  dalam volume yang diselubungi oleh permukaan di atas.

(b) Misalkan  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ . Maka  $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$ .

Normal satuan terhadap  $S$  adalah  $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ . Maka  $n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \cos \alpha$ ,  $n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \cos \beta$  dan  $n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \cos \gamma$ , dimana  $\alpha, \beta, \gamma$  adalah sudut-sudut yang dibuat  $\mathbf{n}$  masing-masing dengan sumbu-sumbu  $x, y, z$  atau dengan arah-arah  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Besaran-besaran  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  adalah arah-arah cosinus dari  $\mathbf{n}$ . Maka

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}) \\ &= A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma\end{aligned}$$

dan teorema divergensi dapat dituliskan

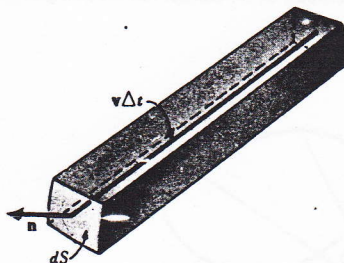
$$\iiint_V \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma) dS$$

### 15. Demonstrasikan teorema divergensi secara fisis.

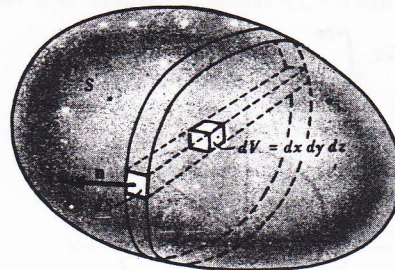
Misalkan  $\mathbf{A}$  = kecepatan  $\mathbf{v}$  pada sebarang titik dari fluida yang bergerak. Dari Gambar (a) di bawah:

Volume dari fluida yang melewati  $dS$  dalam  $\Delta t$  detik  
 = volume yang terkandung dalam silinder dengan luas alas  $dS$  dan tinggi atau panjang  $\mathbf{v}\Delta t$   
 =  $(\mathbf{v}\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \Delta t$

Maka volume per detik dari fluida yang melewati  $dS = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$



Gambar (a)



Gambar (b)

Dari Gambar (b) di atas :

Volume total per detik dari fluida yang keluar dari permukaan tertutup  $S$

$$= \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Dari Soal 21 Bab 4,  $\nabla \cdot \mathbf{v} dV$  adalah volume per detik dari fluida yang keluar dari sebuah elemen volume  $dV$ . Maka

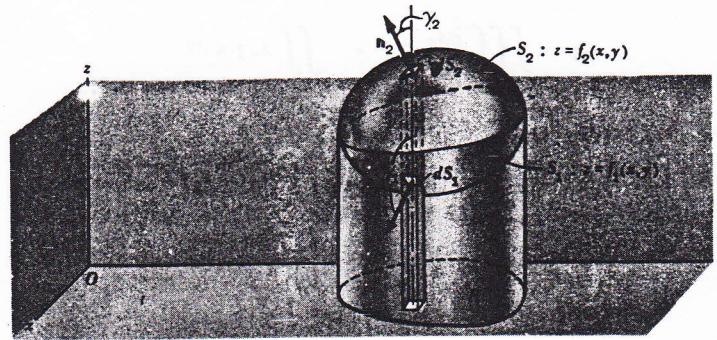
Volume total per detik dari fluida yang keluar dari semua elemen volume dalam  $S$

$$= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV$$

Jadi

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV$$

16. Buktikan teorema divergensi.



Misalkan  $S$  sebuah permukaan tertutup yang sedemikian rupa sehingga sebarang garis sejajar sumbu-sumbu koordinat memotong  $S$  paling banyak pada dua buah titik. Anggaplah persamaan-persamaan dari bagian-bagian bawah dan atas,  $S_1$  dan  $S_2$ , masing-masingnya adalah  $z = f_1(x, y)$  dan  $z = f_2(x, y)$ . Nyatakan proyeksi dari permukaan pada bidang  $xy$  dengan  $R$ . Pandang

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV &= \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dz dy dx = \iint_R \left[ \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right] dy dx \\ &= \iint_R A_3(x, y, z) \Big|_{z=f_1}^{z=f_2} dy dx = \iint_R [A_3(x, y, f_2) - A_3(x, y, f_1)] dy dx \end{aligned}$$

Untuk bagian atas  $S_2$ ,  $dy dx = \cos \gamma_2 dS_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2$ , karena normal  $\mathbf{n}_2$  terhadap  $S_2$  membuat sudut lancip  $\gamma_2$  dengan  $\mathbf{k}$ .

Untuk bagian bawah  $S_1$ ,  $dy dx = -\cos \gamma_1 dS_1 = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1$  karena normal  $\mathbf{n}_1$  terhadap  $S_1$  membuat sudut tumpul  $\gamma_1$  dengan  $\mathbf{k}$ .

Maka

$$\begin{aligned} \iint_R A_3(x, y, f_2) dy dx &= \iint_{S_2} A_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \\ \iint_R A_3(x, y, f_1) dy dx &= - \iint_{S_1} A_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \iint_R A_3(x, y, f_2) dy dx - \iint_R A_3(x, y, f_1) dy dx &= \iint_{S_2} A_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 + \iint_{S_1} A_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 \\ &= \iint_S A_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

sehingga

$$(1) \quad \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV = \iint_S A_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS$$

Dengan cara yang sama, dengan memproyeksikan  $S$  pada bidang-bidang koordinat lainnya,

$$(2) \quad \iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV = \iint_S A_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$(3) \quad \iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y} dV = \iint_S A_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

Jumlahkan (1), (2) dan (3),

$$\iiint_V \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \iint_S (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

atau

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

Teorema ini dapat diperluas pada permukaan-permukaan yang ada sedemikian rupa sehingga garis-garis yang sejajar sumbu-sumbu koordinat memotongnya pada lebih daripada dua buah titik. Untuk membuktikan teorema ini, bagikan daerah yang dibatasi  $S$  kedalam subdaerah-subdaerah yang permukaan-permukaannya memenuhi persyaratan ini. Prosedur ini analog dengan yang dipergunakan pada teorema Green dalam bidang.

17. Hitunglah  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ , di mana  $\mathbf{F} = 4xz \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$  dan  $S$  adalah permukaan kubus yang dibatasi oleh  $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ .

Dari teorema divergensi, integral yang dimintakan sama-dengan

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right] dV \\ &= \iiint_V (4z - y) dV = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (4z - y) dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (2z^2 - yz) \Big|_{z=0}^1 dy dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (2 - y) dy dx = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Integral permukaan dapat pula dihitung secara langsung seperti dalam Soal 23, Bab 5.

18. Periksalah kebenaran teorema divergensi untuk  $\mathbf{A} = 4x \mathbf{i} - 2y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$  yang diintegrasikan melalui ruang yang dibatasi oleh  $x^2 + y^2 = 4, z=0$  dan  $z=3$ .

$$\begin{aligned} \text{Integral volume} &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dV \\ &= \iiint_V (4 - 4y + 2z) dV = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=0}^3 (4 - 4y + 2z) dz dy dx = 84\pi \end{aligned}$$

Permukaan  $S$  dari silinder terdiri atas alas  $S_1$  ( $z=0$ ), tutup atas  $S_2$  ( $z=3$ ) dan bagian cembung  $S_3$  ( $x^2 + y^2 = 4$ ). Maka

$$\text{Integral permukaan} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_3$$



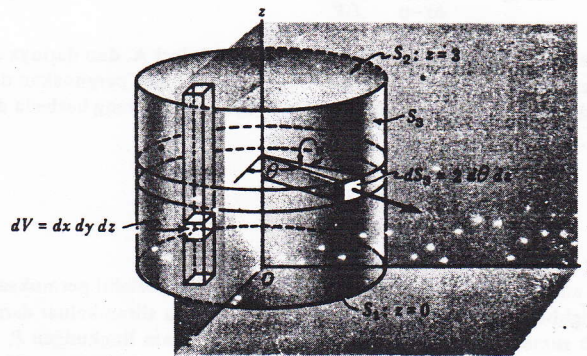
Pada  $S_1$  ( $z=0$ ),  $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ , sehingga  $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_1 = 0$ .

Pada  $S_2$  ( $z=3$ ),  $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$  dan  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 9$ , sehingga

$$\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_2 = 9 \iint_{S_2} dS_2 = 36\pi, \text{ karena luas } S_2 = 4\pi$$

Pada  $S_3$  ( $x^2 + y^2 = 4$ ). Sebuah garis yang tegak-lurus  $x^2 + y^2 = 4$  mempunyai arah  $\nabla(x^2 + y^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ . Maka normal satuannya adalah  $\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2}$  karena  $x^2 + y^2 = 4$ .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2}\right) = 2x^2 - y^3$$



Dari gambar di atas,  $x = 2 \cos \theta$ ,  $y = 2 \sin \theta$ ,  $dS_3 = 2d\theta dz$ , dan dengan demikian

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_3 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^3 [2(2 \cos \theta)^2 - (2 \sin \theta)^3] 2 \, dz \, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} (48 \cos^2 \theta - 48 \sin^3 \theta) \, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 48 \cos^2 \theta \, d\theta = 48\pi \end{aligned}$$

Maka integral permukaan  $= 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$ , yang mana sesuai dengan integral volume dan dengan demikian kebenaran teorema divergensi ini terbukti.

Perhatikan bahwa perhitungan integral permukaan melalui  $S_3$  dapat juga dilakukan dengan memproyeksikan  $S_3$  pada bidang-bidang koordinat  $xz$  atau  $yz$ .

19. Jika  $\text{div } \mathbf{A}$  menyatakan divergensi sebuah medan vektor  $\mathbf{A}$  pada sebuah titik  $P$ , perlihatkan bahwa

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS}{\Delta V}$$

di mana  $\Delta V$  adalah volume yang diselubungi oleh permukaan  $\Delta S$  dan limitnya diperoleh dengan menyusutkan  $\Delta V$  ke titik  $P$ .

Menurut teorema divergensi,

$$\iiint_{\Delta V} \text{div } \mathbf{A} \, dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Menurut teorema harga rata-rata dari integral, ruas kiri dapat dituliskan

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} \iiint_{\Delta V} dV = \overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} \Delta V$$

di mana  $\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$  adalah suatu harga antara maksimum dan minimum dari  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  di seluruh  $\Delta V$ . Maka

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} = \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V}$$

Ambilkan limit  $\Delta V \rightarrow 0$  sedemikian rupa sehingga  $P$  selalu didalam  $\Delta V$ , maka  $\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$  mendekati harga  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  pada titik  $P$ ; oleh karena itu

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V}$$

Hasil ini dapat diambil sebagai titik awal pendefinisian divergensi dari  $\mathbf{A}$ , dan darinya semua sifat-sifat dapat diturunkan termasuk pembuktian teorema divergensi. Dalam Bab 7 kita pergunakan definisi ini untuk memperluas konsep divergensi sebuah vektor kedalam sistem koordinat lain yang berbeda dari sistem koordinat tegak lurus. Secara fisis,

$$\frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V}$$

menyatakan fluks atau neto aliran-keluar setiap volume satuan vektor  $\mathbf{A}$  melalui permukaan  $\Delta S$ . Jika  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  positif dalam lingkungan (neighborhood) sebuah titik  $P$ , ini berarti bahwa aliran-keluar dari  $P$  adalah positif dan kita menyebut  $P$  sebuah *sumber*. Begitupula, jika  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  negatif dalam lingkungan  $P$ , aliran-keluarnya sebenarnya aliran kedalam dan  $P$  disebut sebuah *sungap* (*sink*). Bila dalam suatu ruang tidak terdapat sumber dan sungap, maka  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  dan kita menyebut  $\mathbf{A}$  sebuah medan-vektor *solenoidal*.

20. Hitunglah  $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$ , di mana  $S$  sebuah permukaan tertutup.

Menurut teorema divergensi,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r} dV \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (x i + y j + z k) dV \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dV = 3 \iiint_V dV = 3V \end{aligned}$$

di mana  $V$  adalah volume yang diselubungi oleh  $S$ .

21. Misalkan  $\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$ .

Ambilkan  $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$  dalam teorema divergensi. Maka

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

Tetapi  $\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi (\nabla \cdot \nabla \psi) + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)$

Jadi 
$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV$$

at:

$$(1) \quad \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

yang mana membuktikan *identitas Green yang pertama*. Pertukarkan  $\phi$  dan  $\psi$  dalam (1),

$$(2) \quad \iiint_V [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi)] dV = \iint_S (\psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

Ambilkan selisihnya antara (2) dan (1), kita peroleh

$$(3) \quad \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

yang mana adalah *identitas Green kedua* atau *teorema simetrik*. Dalam pembuktian di atas kita telah menganggap bahwa  $\phi$  dan  $\psi$  adalah fungsi-fungsi skalar dari kedudukan dengan paling sedikit turunan-turunan kedua yang kontinu.

22. Buktikan 
$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \phi \mathbf{n} dS.$$

Misalkan  $\mathbf{A} = \phi \mathbf{C}$  dalam teorema divergensi dimana  $\mathbf{C}$  vektor konstan. Maka

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{C}) dV = \iint_S \phi \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} dS$$

Karena  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{C}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \nabla \phi$  dan  $\phi \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{C} \cdot (\phi \mathbf{n})$ ,

$$\iiint_V \mathbf{C} \cdot \nabla \phi dV = \iint_S \mathbf{C} \cdot (\phi \mathbf{n}) dS$$

Keluarkan  $\mathbf{C}$  dari tanda-tanda integral,

$$\mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla \phi dV = \mathbf{C} \cdot \iint_S \phi \mathbf{n} dS$$

karena  $\mathbf{C}$  adalah sebuah vektor sebarang, maka

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \phi \mathbf{n} dS$$

23. Buktikan 
$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{B} dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B} dS.$$

Misalkan  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  dalam teorema divergensi di mana  $\mathbf{C}$  sebuah vektor konstan. Maka

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) dV = \iint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} dS$$



Karena  $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  dan  $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B})$ ,

$$\iiint_V \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV = \iint_S \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) dS$$

Keluarkan  $\mathbf{C}$  dari tanda-tanda integral

$$\mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{B} dV = \mathbf{C} \cdot \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B} dS$$

dan karena  $\mathbf{C}$  sebuah vektor sebarang, maka

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{B} dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B} dS$$

24. Perhatikan bahwa pada sebarang titik  $P$

$$(a) \nabla \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} dS}{\Delta V} \quad \text{dan} \quad (b) \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS}{\Delta V}$$

di mana  $\Delta V$  adalah volume yang diselubungi oleh permukaan  $\Delta S$ , dan limitnya diperoleh dengan menyusutkan  $\Delta V$  ke titik  $P$ .

$$(a) \text{ Dari Soal 22, } \iiint_{\Delta V} \nabla \phi dV = \iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} dS. \text{ Maka } \iiint_{\Delta V} \nabla \phi \cdot \mathbf{i} dV = \iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS.$$

Penggunaan prinsip yang sama yang diterapkan dalam Soal 19, kita peroleh

$$\overline{\nabla \phi \cdot \mathbf{i}} = \frac{\iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS}{\Delta V}$$

di mana  $\overline{\nabla \phi \cdot \mathbf{i}}$  adalah suatu harga antara maksimum dan minimum dari  $\nabla \phi \cdot \mathbf{i}$  diseluruh  $\Delta V$ . Ambilkan limit  $\Delta V \rightarrow 0$  sedemikian rupa sehingga titik  $P$  selalu berada dibagian dalam  $\Delta V$ , maka  $\overline{\nabla \phi \cdot \mathbf{i}}$  mendekati harga

$$(1) \quad \nabla \phi \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS}{\Delta V}$$

Dengan cara yang sama kita peroleh

$$(2) \quad \nabla \phi \cdot \mathbf{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} dS}{\Delta V}$$

$$(3) \quad \nabla \phi \cdot \mathbf{k} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS}{\Delta V}$$

Perkalikan (1), (2), (3) masing-masingnya dengan  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , dan jumlahkan, dengan mempergunakan

$$\nabla \phi = (\nabla \phi \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\nabla \phi \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\nabla \phi \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

(lihat Soal 20, Bab 2) maka diperoleh hasil yang diinginkan.

(b) Gantikan  $\mathbf{B}$  dengan  $\mathbf{A}$  dalam Soal 23, 
$$\iiint_{\Delta V} \nabla \times \mathbf{A} \, dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, dS.$$

Maka seperti dalam bagian (a), kita dapat memperlihatkan bahwa

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} \, dS}{\Delta V}$$

dan hasil-hasil lainnya yang sama di mana  $\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{k}$  menggantikan  $\mathbf{i}$ . Perkalikan dengan  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  dan jumlahkan, maka diperoleh hasil yang diinginkan.

Hasil-hasil yang diperoleh ini dapat diambil sebagai titik permulaan untuk mendefinisikan gradien dan curl. Dengan mempergunakan definisi-definisi ini, dapat dilakukan perluasan kedalam sistem-sistem koordinat yang lain daripada sistem koordinat tegak-lurus.

25. Buktikan ekivalensi operator

$$\nabla \circ \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ$$

di mana  $\circ$  menyatakan perkalian titik, perkalian silang atau perkalian biasa.

Untuk membuktikan ekivalensinya, maka hasil operasinya pada medan vektor dan skalar haruslah sesuai dengan hasil-hasil yang telah dibuktikan.

Jika  $\circ$  adalah perkalian titik, maka untuk sebuah vektor  $\mathbf{A}$ ,

$$\nabla \circ \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ \mathbf{A}$$

atau

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

yang telah dibuktikan dalam Soal 19.

Begitu pula, jika  $\circ$  adalah perkalian silang,

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, dS \end{aligned}$$

yang telah dibuktikan dalam Soal 24 (b).

Juga bila  $\circ$  adalah perkalian biasa, maka untuk sebuah skalar  $\phi$ ,

$$\nabla \circ \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ \phi \quad \text{atau} \quad \nabla \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \phi \, d\mathbf{S}$$

yang telah dibuktikan dalam Soal 24 (a).

26. Misalkan  $S$  sebuah permukaan tertutup dan  $\mathbf{r}$  menyatakan vektor posisi dari sebarang titik  $(x, y, z)$  yang diukur terhadap titik asal  $O$ . Buktikan bahwa

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$$

sama dengan (a) nol jika  $O$  terletak di luar  $S$ , (b)  $4\pi$  jika  $O$  terletak di dalam  $S$ . Hasil ini dikenal sebagai *teorema Gauss*.

(a) Menurut teorema divergensi, 
$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV.$$

Tetapi  $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$  (Soal 19, Bab 4) pada semua titik di dalam  $V$  asalkan  $r \neq 0$  dalam  $V$ , yakni asalkan

$O$  berada di luar  $V$  jadi berada di luar  $S$ . Maka 
$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = 0.$$

- (b) Jika  $O$  di dalam  $S$ , selubungi  $O$  dengan sebuah permukaan bola kecil  $s$  berjari  $a$ : Misalkan  $\tau$  menyatakan daerah yang dibatasi  $S$  dan  $s$ . Maka menurut teorema divergensi,

$$\iint_{S+s} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS + \iint_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = 0$$

karena  $r \neq 0$  dalam  $\tau$ . Jadi

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = - \iint_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$$

Pada  $s$ ,  $r = a$ ,  $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{a}$  sehingga 
$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{(-\mathbf{r}/a) \cdot \mathbf{r}}{a^3} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{a^4} = -\frac{a^2}{a^4} = -\frac{1}{a^2} \quad \text{dan}$$

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = - \iint_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \iint_s \frac{1}{a^2} dS = \frac{1}{a^2} \iint_s dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi$$

27. Interpretasikan teorema Gauss (Soal 26) secara geometris.

Misalkan  $dS$  menyatakan luas sebuah elemen permukaan dan hubungkan semua titik pada batas dari  $dS$  dengan  $O$  (lihat gambar di samping), sehingga dengan cara demikian terbentuk sebuah kerucut. Misalkan  $d\Omega$  luas sebagian permukaan bola dengan pusat di  $O$  dan berjari  $r$  yang dipotong kerucut ini; maka *sudut ruang* yang dibentuk  $dS$  pada titik  $O$

didefinisikan sebagai  $d\omega = \frac{d\Omega}{r^2}$  yang secara nu-

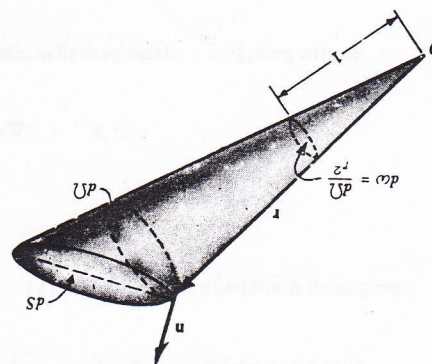
merik sama-dengan luas sebagian permukaan bola di atas dengan titik pusat di  $O$  dan berjari satuan yang dipotong oleh kerucut. Misalkan  $\mathbf{n}$  adalah normal satuan positif terhadap  $dS$  dan  $\theta$  sudut antara

$\mathbf{n}$  dan  $\mathbf{r}$ ; maka  $\cos \theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r}$  Juga,  $d\Omega = \pm dS \cos \theta$

$= \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} dS$  sehingga  $d\omega = \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$ , tanda +

atau - dipilih sesuai dengan sudut  $\theta$  yang dibentuk antara  $\mathbf{n}$  dan  $\mathbf{r}$  apakah lancip atau tumpul.

Misalkan  $S$  sebuah permukaan, seperti dalam Gambar (a) di bawah, yang adalah sedemikian rupa sehingga  $S$  dipotong oleh sebarang garis tidak lebih daripada dua buah titik. Jika  $O$  terletak di luar  $S$ , maka

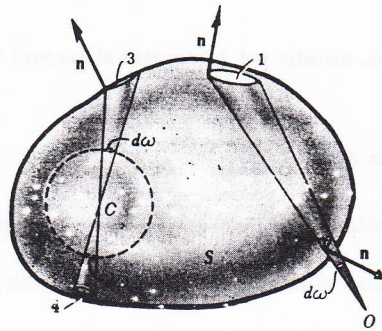




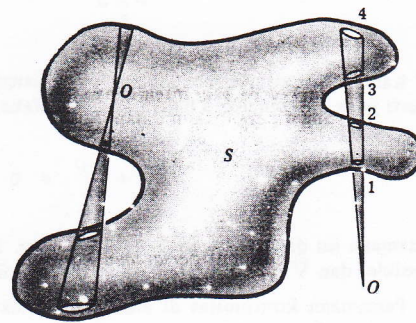
pada suatu kedudukan seperti 1,  $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = d\omega$ ; sedangkan pada kedudukan 2,  $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = -d\omega$ . Integrasi melalui daerah-daerah ini hasilnya nol, karena kontribusi terhadap sudut-ruang saling menghapuskan. Bila

integrasinya dilakukan melalui  $S$  maka  $\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = 0$ , karena untuk setiap kontribusi positif terdapat pula kontribusi negatifnya.

Sedangkan dalam hal dimana  $O$  terletak di dalam  $S$ , maka pada kedudukan seperti 3,  $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = d\omega$  dan pada 4,  $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = d\omega$  sehingga dengan demikian kontribusinya saling menambah daripada menghapuskan. Sudut ruang total dalam hal ini sama dengan luas permukaan sebuah bola satuan yang adalah  $4\pi$ , sehingga dengan demikian  $\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = 4\pi$ .



Gambar (a)



Gambar (b)

Untuk permukaan-permukaan  $S$ , di mana sebuah garis dapat memotong  $S$  pada lebih daripada dua buah titik, keadaan yang tepat sama juga berlaku seperti terlihat pada Gambar (b) di atas. Bila  $O$  berada di luar  $S$ , misalnya, maka sebuah kerucut dengan sudut puncak di  $O$  memotong  $S$  pada sejumlah genap tempat-tempat dan kontribusinya pada integral permukaan adalah nol karena sudut-ruang yang terbentuk di  $O$  secara berpasangan saling menghapuskan. Sedangkan bila  $O$  berada di dalam  $S$ , maka sebuah kerucut dengan sudut-puncak di  $O$  memotong  $S$  pada sejumlah ganjil tempat-tempat dan oleh karena kontribusi yang saling menghapuskan hanya terjadi untuk yang berjumlah genap, maka selalu terdapat kontribusi  $4\pi$  untuk seluruh permukaan  $S$ .

28. Sebuah fluida dengan kerapatan  $\rho(x, y, z, t)$  bergerak dengan kecepatan  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ . Bila tidak terdapat sumber dan sungap, buktikan bahwa.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{di mana } \mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

Pandang sebarang permukaan yang menyelubungi volume  $V$  dari fluida. Massa fluida di dalam volume  $V$  pada setiap saat adalah

$$M = \iiint_V \rho dV$$

Laju pertambahan massa ini adalah

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Massa fluida per satuan waktu yang meninggalkan  $V$  adalah

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(lihat Soal 15) dan dengan demikian laju pertambahan massa adalah

$$-\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

menurut teorema divergensi. Maka

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

atau

$$\iiint_V \left( \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

Karena  $V$  sebarang, integrannya, yang dianggap kontinu, haruslah nol, berdasarkan alasan yang sama seperti yang dipergunakan dalam Soal 12. Maka

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{di mana } \mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

Persamaan ini disebut *persamaan kontinuitas*. Jika  $\rho$  konstan, maka fluidanya tak-termampatkan (incompressible) dan  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , yakni  $\mathbf{v}$  adalah solenoidal.

Persamaan kontinuitas di atas juga berlaku dalam teori elektromagnetik, di mana  $\rho$  adalah *kerapatan muatan* dan  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  adalah *kerapatan arus*.

29. Jika temperatur pada sebarang titik  $(x, y, z)$  dari sebuah zat padat pada saat  $t$  adalah  $U(x, y, z, t)$  dan bila  $k$ ,  $\rho$  dan  $c$  masing-masing adalah konduktivitas panas, kerapatan dan kapasitas panas zat padat, yang dianggap konstan, perlihatkan bahwa

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \nabla^2 U \quad \text{di mana } k = \kappa/\rho c$$

Misalkan  $V$  adalah sebarang volume di dalam zat padat dan misalkan  $S$  menyatakan permukaannya. Fluks total dari panas yang melalui  $S$ , atau kuantitas panas yang meninggalkan  $S$  persatuan waktu, adalah

$$\iint_S (-\kappa \nabla U) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Jadi kuantitas panas yang memasuki  $S$  per satuan waktu adalah

$$(1) \quad \iint_S (\kappa \nabla U) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot (\kappa \nabla U) \, dV$$

menurut teorema divergensi. Panas yang terkandung dalam volume  $V$  diberikan oleh

$$\iiint_V c \rho U \, dV$$

Maka laju pertambahan panas adalah

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c \rho U \, dV = \iiint_V c \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dV$$

Samakan ruas kanan dari (1) dan (2),

$$\iiint_V \left[ c\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa \nabla U) \right] dV = 0$$

dan karena  $V$  sebarang, integrandnya, yang dianggap kontinu, haruslah nol sehingga

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla U)$$

atau jika  $\kappa, c, \rho$  adalah konstanta-konstanta, maka

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \nabla \cdot \nabla U = k \nabla^2 U$$

Besaran  $k$  disebut *koefisien difusi*. Untuk aliran panas dalam keadaan tunak (yakni  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  atau  $U$  tak bergantung pada waktu) persamaannya ter-reduksi menjadi persamaan Laplace  $\nabla^2 U = 0$ .

### TEOREMA STOKES

30. (a) Nyatakan teorema Stokes dalam kata-kata dan (b) tuliskan dalam bentuk koordinat tegak-lurusnya.

(a) Integral garis dari komponen tangensial sebuah vektor  $\mathbf{A}$  mengelilingi sebuah kurva tertutup sederhana  $C$  sama-dengan integral permukaan komponen normal dari curl  $\mathbf{A}$  melalui sebarang permukaan  $S$  dengan  $C$  sebagai batasnya.

(b) Seperti dalam Soal 14(b),

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

Maka

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos \gamma$$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

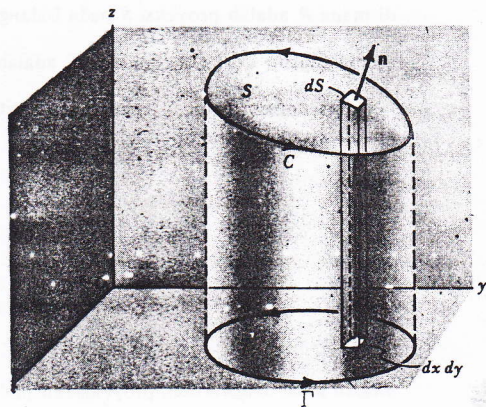
dan teorema Stokes menjadi

$$\iint_S \left[ \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS = \oint_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

31. Buktikan teorema Stokes.

Misalkan  $S$  sebuah permukaan yang adalah sedemikian rupa sehingga proyeksinya pada bidang-bidang  $xy$ ,  $yz$  dan  $xz$  adalah daerah-daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva tertutup sederhana, seperti ditunjukkan dalam gambar di samping. Andaikan  $S$  dinyatakan oleh  $z = f(x, y)$  atau  $x = g(x, y)$  atau  $y = h(x, z)$ , di mana  $f, g, h$  adalah fungsi-fungsi yang berharga tunggal, kontinu dan diferensiabel. Kita harus memperlihatkan bahwa

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S [\nabla \times (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k})] \cdot \mathbf{n} dS$$





$$= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

di mana  $C$  adalah batas dari  $S$ .

Pertama pandang  $\iint_S [\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS$ .

$$\text{Karena } \nabla \times (A_1 \mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{k},$$

$$(1) \quad [\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right) dS$$

Jika  $z = f(x, y)$  diambil sebagai persamaan dari  $S$ , maka vektor posisi dari sebarang titik pada  $S$  adalah  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$  sehingga  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k}$ . Tetapi  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$  adalah sebuah vektor singgung terhadap  $S$  (lihat Soal 25, Bab 3) jadi dengan demikian tegak-lurus  $\mathbf{n}$ , sehingga

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{atau} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$$

Substitusikan dalam (1) maka diperoleh

$$\left( \frac{\partial A_1}{\partial z} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right) dS = \left( -\frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right) dS$$

atau

$$(2) \quad [\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS = -\left( \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, dS$$

Pada  $S$ ,  $A_1(x, y, z) = A_1(x, y, f(x, y)) = F(x, y)$ ; oleh karena itu  $\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$  dan (2) menjadi

$$[\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS = -\frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, dS = -\frac{\partial F}{\partial y} \, dx \, dy$$

Maka

$$\iint_S [\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R -\frac{\partial F}{\partial y} \, dx \, dy$$

di mana  $R$  adalah proyeksi  $S$  pada bidang  $xy$ . Menurut teorema Green dalam bidang, integral yang terakhir sama-dengan  $\oint_{\Gamma} F \, dx$  di mana  $\Gamma$  adalah batas dari  $R$ . Karena pada tiap-tiap titik  $(x, y)$  dari  $\Gamma$  harga dari  $F$  sama dengan harga  $A_1$  pada tiap-tiap titik  $(x, y, z)$  dari  $C$ , dan karena  $dx$  adalah sama untuk kedua kurva, maka kita harus memperoleh

$$\oint_{\Gamma} F \, dx = \oint_C A_1 \, dx$$

atau

$$\iint_S [\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C A_1 \, dx$$

Begitu pula, dengan memproyeksikan pada bidang-bidang koordinat lainnya,

$$\iint_S [\nabla \times (A_2 \mathbf{j})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C A_2 \, dy$$

$$\iint_S [\nabla \times (A_3 \mathbf{k})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C A_3 \, dz$$

Jadi dengan menjumlahkan,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Teorema ini juga berlaku untuk permukaan-permukaan  $S$  yang tak memenuhi persyaratan-persyaratan yang dikenakan di atas. Karena andaikan  $S$  dapat dibagi-bagi kedalam permukaan-permukaan  $S_1, S_2, \dots, S_k$  dengan batas-batas  $C_1, C_2, \dots, C_k$  yang mana memenuhi persyaratan-persyaratan di atas, maka teorema Stokes berlaku untuk tiap-tiap permukaan. Dengan menjumlahkan integral-integral permukaan ini, maka diperoleh integral permukaan total melalui  $S$ . Dengan menjumlahkan integral-integral garis yang bersangkutan sepanjang  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , maka diperoleh integral garis sepanjang  $C$ .

32. Periksalah kebenaran teorema Stokes untuk  $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ , di mana  $S$  adalah separuh dari permukaan bola  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  bagian atas dan  $C$  batasnya.

Batas  $C$  dari  $S$  adalah sebuah lingkaran dalam bidang  $xy$  yang berjejari satu dan berpusat dititik asal. Misalkan  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 0$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  adalah persamaan-persamaan parameter dari  $C$ . Maka

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (2x - y) \, dx - yz^2 \, dy - y^2z \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t) (-\sin t) \, dt = -\pi \end{aligned}$$

Juga,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

Maka

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R dx \, dy$$

karena  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, dS = dx \, dy$  dan  $R$  adalah proyeksi  $S$  pada bidang  $xy$ . Integral yang terakhir ini sama-dengan

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \pi$$

dan terbuktilah kebenaran teorema Stokes.

33. Buktikan bahwa syarat perlu dan cukup bahwa  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$  untuk setiap kurva tertutup  $C$  adalah  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

Syarat cukup. Andaikan  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Maka menurut teorema Stokes

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

Syarat perlu. Andaikan  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$  sepanjang setiap lintasan tertutup  $C$ , dan anggaplah  $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  pada beberapa titik  $P$ . Maka dengan menganggap  $\nabla \times \mathbf{A}$  kontinu maka akan terdapat suatu daerah dengan  $P$  sebagai titik interior, dimana  $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ . Misalkan  $S$  sebuah permukaan yang terkandung dalam daerah ini yang normalnya  $\mathbf{n}$  pada tiap-tiap titik memiliki arah yang sama seperti  $\nabla \times \mathbf{A}$ , yakni  $\nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{n}$  dimana  $\alpha$  adalah sebuah konstanta positif. Misalkan  $C$  adalah batas dari  $S$ . Maka menurut teorema Stokes

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \alpha \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \, dS > 0$$

yang mana bertentangan dengan hipotesis bahwa  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ . Jadi hal ini memperlihatkan bahwa  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

Juga diperoleh bahwa  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  adalah suatu syarat perlu dan cukup agar integral garis  $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$

tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan titik-titik  $P_1$  dan  $P_2$ . (Lihat Soal-soal 10 dan 11, Bab 5)

34. Buktikan  $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS$ .

Ambilkan  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  dalam teorema Stokes, di mana  $\mathbf{C}$  sebuah vektor konstan. Maka

$$\begin{aligned} \oint d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \iint_S [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \cdot \mathbf{n} \, dS \\ \oint \mathbf{C} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) &= \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{C} (\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} \, dS \\ \mathbf{C} \cdot \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} &= \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_S [\mathbf{C} (\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_S \mathbf{C} \cdot [\nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] \, dS - \iint_S \mathbf{C} \cdot [\mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{B})] \, dS \\ &= \mathbf{C} \cdot \iint_S [\nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{B})] \, dS = \mathbf{C} \cdot \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS \end{aligned}$$

Karena  $\mathbf{C}$  vektor konstan sebarang maka  $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS$

35. Jika  $\Delta S$  adalah sebuah permukaan yang dibatasi oleh kurva-kurva tertutup sederhana  $C$ ,  $P$  sebarang titik dari  $\Delta S$  tetapi tidak terletak pada  $C$  dan  $\mathbf{n}$  adalah normal satuan terhadap  $\Delta S$  di  $P$ , maka perhatikan bahwa di  $P$  berlaku

$$(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

di mana limitnya diambil sedemikian rupa sehingga  $\Delta S$  menyusut ke titik  $P$ .

Menurut teorema Stokes,  $\iint_{\Delta S} (\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ .



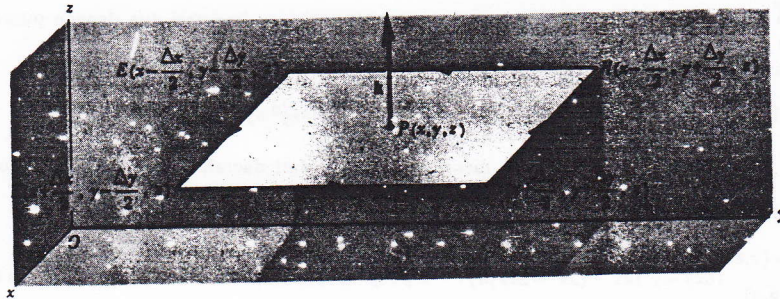
Pergunakan teorema harga rata-rata untuk integral-integral seperti dalam Soal-soal 19 dan 24, maka bentuk ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}} = \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

dan hasil yang diinginkan segera diperoleh dengan mengambil limit  $\Delta S \rightarrow 0$ .

Hasil ini dapat dipergunakan sebagai titik-awal untuk mendefinisikan curl  $\mathbf{A}$  (lihat Soal 36) dan adalah bermanfaat untuk memperoleh curl  $\mathbf{A}$  dalam sistem-sistem koordinat yang lain daripada sistem koordinat tegak-lurus. Karena  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  disebut sirkulasi dari  $\mathbf{A}$  mengelilingi  $C$ , maka komponen normal dari Curl dapat diinterpretasi secara fisis sebagai limit dari sirkulasi per satuan luas, jadi menerangkan sinonimnya rotasi dari  $\mathbf{A}$  (rot  $\mathbf{A}$ ) daripada curl dari  $\mathbf{A}$ .

36. Jika curl  $\mathbf{A}$  didefinisikan menurut proses limit dari Soal 35, maka carilah komponen  $z$  dari curl  $\mathbf{A}$ .



Misalkan  $EFGH$  adalah empat-persegi-panjang yang sejajar dengan bidang  $xy$  dengan titik interior  $P(x, y, z)$  diambil sebagai titik-pertengahan, seperti diperlihatkan dalam gambar di atas. Misalkan  $A_1$  dan  $A_2$  komponen-komponen  $\mathbf{A}$  di  $P$  dalam arah-arah  $x$  positif dan  $y$  positif.

Jika  $C$  adalah batas dari empat-persegi-panjang, maka

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{EF} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{FG} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{GH} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{HE} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \text{Tetapi } \int_{EF} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= (A_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial y} \Delta y) \Delta x & \int_{GH} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= -(A_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial y} \Delta y) \Delta x \\ \int_{FG} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= (A_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \Delta x) \Delta y & \int_{HE} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= -(A_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \Delta x) \Delta y \end{aligned}$$

di mana telah diabaikan suku-suku infinitesimal-infinitesimal yang berorde lebih tinggi.

$$\text{Jumlahkan, maka secara pendekatan kita peroleh } \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}) \Delta x \Delta y.$$

Karena  $\Delta S = \Delta x \Delta y$ , maka

$$\text{komponen } z \text{ dari curl } \mathbf{A} = (\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \\
 &= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}
 \end{aligned}$$

### Soal-soal Tambahan

37. Periksa kebenaran teorema Green dalam bidang untuk  $\oint_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ , di mana  $C$  adalah batas daerah yang didefinisikan oleh : (a)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$ ; (b)  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ .  
*Jawab.* (a) harga kedua-duanya =  $3/2$ . (b) harga kedua-duanya =  $5/3$ .

38. Hitunglah  $\oint_C (3x + 4y)dx + (2x - 3y)dy$  di mana  $C$ , sebuah lingkaran berjejari dua dengan pusat pada titik-asal dari bidang  $xy$ , dilintasi dalam arah positif. *Jawab.*  $-8\pi$

39. Kerjakan soal sebelumnya untuk integral garis  $\oint_C (x^2 + y^2)dx + 3xy^2 dy$ . *Jawab.*  $12\pi$ .

40. Hitunglah  $\oint (x^2 - 2xy)dx + (x^2y + 3)dy$  mengelilingi batas dari daerah yang didefinisikan oleh  $y^2 = 8x$  dan  $x = 2$  (a) secara langsung, (b) penggunaan teorema Green. *Jawab.*  $128/5$ .

41. Hitunglah  $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)} (6xy - y^2)dx + (3x^2 - 2xy)dy$  sepanjang cycloid  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$ .  
*Jawab.*  $-6\pi^2 - 4\pi$

42. Hitunglah  $\oint (3x^2 + 2y)dx - (x + 3\cos y)dy$  sepanjang empat-persegi-panjang yang memiliki titik-titik sudut di  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 1)$  dan  $(1, 1)$ . *Jawab.*  $-6$

43. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh satu lengkungan dari cycloid  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$ ,  $a > 0$  dan sumbu  $x$ . *Jawab.*  $3\pi a^2$ .

44. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh hypocloid  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ,  $a > 0$ . Petunjuk : Persamaan-persamaan parameternya adalah  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \sin^3 \theta$ . *Jawab.*  $3\pi a^3/8$ .

45. Perhatikan bahwa dalam koordinat-koordinat polar  $(\rho, \phi)$  pernyataan  $x dy - y dx = \rho^2 d\phi$ . Interpretasikan  $\frac{1}{2} \int x dy - y dx$ .

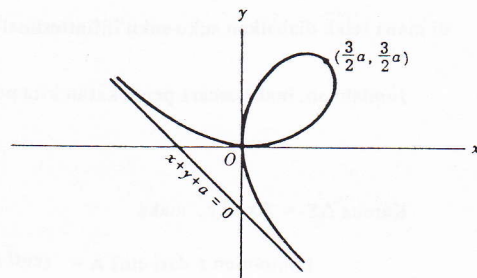
46. Carilah luas loop yang terdiri atas empat lembar rose  $\rho = 3 \sin 2\phi$ . *Jawab.*  $9\pi/8$ .

47. Carilah luas kedua buah loop dari lemniscate  $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$ . *Jawab.*  $a^2$

48. Carilah luas loop dari folium Descartes  $x^3 + y^3 = 3axy$ ,  $a > 0$  (lihat gambar disamping). Petunjuk : Misalkan  $y = tx$  dan peroleh persamaan parameter dari kurva ini. Kemudian penggunaan kenyataan bahwa

$$\begin{aligned}
 \text{Luas} &= \frac{1}{2} \oint x dy - y dx \\
 &= \frac{1}{2} \oint x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \oint x^2 dt
 \end{aligned}$$

*Jawab.*  $3a^2/2$ .



49. Periksa kebenaran teorema Green dalam bidang untuk  $\oint_C (2x - y^2) dx - xy dy$ , dimana  $C$  adalah batas dari daerah yang dibatasi oleh lingkaran-lingkaran  $x^2 + y^2 = 1$  dan  $x^2 + y^2 = 9$ . *Jawab.* Harga kedua belah ruas =  $60\pi$

50. Hitunglah  $\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$  sepanjang lintasan-lintasan berikut :

- (a) potongan-potongan garis-lurus dari  $(1,0)$  ke  $(1,1)$ , kemudian ke  $(-1,1)$ , dan kemudian ke  $(-1,0)$   
 (b) potongan-potongan garis-lurus dari  $(1,0)$  ke  $(1,-1)$ , kemudian ke  $(-1,-1)$ , dan kemudian ke  $(-1,0)$

Perlihatkan bahwa meskipun  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , tetapi integral garisnya bergantung pada lintasan yang menghubungkan  $(1,0)$  dengan  $(-1,0)$  dan jelaskan.

*Jawab.* (a)  $\pi$ . (b)  $-\pi$ .

51. Dengan merubah variabel-variabel dari  $(x, y)$  ke  $(u, v)$  menurut transformasi  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , maka perlihatkan bahwa luas  $A$  dari daerah  $R$  yang dibatasi oleh kurva sederhana  $C$  diberikan oleh

$$A = \iint_R \left| J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv \quad \text{di mana} \quad J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

adalah Jacobian dari  $x$  dan  $y$  terhadap  $u$  dan  $v$ . Batasan-batasan apakah yang harus dibuat ? Ilustrasikan hasilnya di mana  $u$  dan  $v$  adalah koordinat-koordinat polar.

Petunjuk : Pergunakan hasil  $A = \frac{1}{2} \int x dy - y dx$ , transformasikan ke koordinat-koordinat  $u, v$  dan kemudian pergunakan teorema Green.

52. Hitunglah  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ , di mana  $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$  dan  $S$  adalah :

- (a) permukaan balok yang dibatasi oleh  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1$  dan  $z = 3$ .  
 (b) permukaan dari daerah yang dibatasi oleh  $x = 0, y = 0, y = 3, z = 0$  dan  $x + 2z = 6$ .

*Jawab.* (a) 30 (b)  $351/2$

53. Periksa kebenaran teorema Green untuk  $\mathbf{A} = 2x^2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz^2\mathbf{k}$  yang diambil melalui daerah dalam oktan pertama yang dibatasi oleh  $y^2 + z^2 = 9$  dan  $x = 2$ . *Jawab.* 180

54. Hitunglah  $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$  di mana (a)  $S$  adalah permukaan bola berjari 2 dengan pusat di  $(0, 0, 0)$ , (b)  $S$  adalah permukaan kubus yang dibatasi oleh  $x = -1, y = -1, z = -1, x = 1, y = 1, z = 1$ . (c)  $S$  adalah permukaan yang dibatasi oleh paraboloid  $z = 4 - (x^2 + y^2)$  dan bidang  $xy$ .

*Jawab.* (a)  $32\pi$  (b) 24 (c)  $24\pi$

55. Jika  $S$  adalah permukaan tertutup sebarang yang menutupi sebuah volume  $V$  dan  $\mathbf{A} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$ , maka buktikan bahwa  $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = (a + b + c)V$ .

56. Jika  $\mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A}$ , maka buktikan bahwa  $\iint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = 0$  untuk sebarang permukaan tertutup  $S$ .

57. Jika  $\mathbf{n}$  adalah normal satuan berarah keluar pada sebarang permukaan tertutup dengan luas  $S$ , maka perlihatkan bahwa  $\iiint_V \text{div } \mathbf{n} dV = S$ .

58. Buktikan  $\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS$ .

59. Buktikan  $\iint_S r^5 \mathbf{n} dS = \iiint_V 5r^3 \mathbf{r} dV$ .



60. Buktikan  $\iint_S \mathbf{n} \, dS = \mathbf{0}$  untuk sebarang permukaan tertutup  $S$ .
61. Perlihatkan bahwa identitas Green kedua dapat dituliskan sebagai  $\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV = \iint_S (\phi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\phi}{dn}) \, dS$
62. Buktikan  $\iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \mathbf{0}$  untuk sebarang permukaan tertutup  $S$ .
63. Periksalah kebenaran teorema Stokes untuk  $\mathbf{A} = (y - z + 2)\mathbf{i} + (yz + 4)\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ , di mana  $S$  adalah permukaan kubus  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, z = 2$  di atas bidang  $xy$ .  
Jawab. Harga kedua belah ruas =  $-4$ .
64. Periksalah kebenaran teorema Stokes untuk  $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x^2 y\mathbf{k}$ , di mana  $S$  adalah permukaan daerah yang dibatasi oleh  $x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y + 2z = 8$  yang tak termasuk dalam bidang  $xz$ .  
Jawab. Harga kedua belah ruas =  $32/3$
65. Hitunglah  $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS$ , di mana  $\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$  dan  $S$  adalah (a) separuh permukaan bola  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  di atas bidang  $xy$ , (b) paraboloid  $z = 4 - (x^2 + y^2)$  di atas bidang  $xy$   
Jawab. (a)  $-16\pi$ , (b)  $-4\pi$
66. Jika  $\mathbf{A} = 2yz\mathbf{i} - (x + 3y - 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$ , maka hitunglah  $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS$  melalui permukaan dari irisan silinder-silinder  $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$  yang terkandung dalam oktan pertama.  
Jawab.  $-\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a)$
67. Sebuah vektor  $\mathbf{B}$  selalu tegak-lurus (normal) pada permukaan tertutup  $S$ . Perlihatkan bahwa  $\iiint_V \text{curl } \mathbf{B} \, dV = \mathbf{0}$ , di mana  $V$  adalah volume yang dibatasi oleh  $S$ .
68. Jika  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ , di mana  $S$  adalah sebarang permukaan yang dibatasi oleh  $C$ , maka perlihatkan bahwa  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ .
69. Buktikan  $\oint_C \phi \, d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi$ .
70. Penggunaan operator ekuivalen dari Soal-soal yang dipecahkan no. 25 untuk sampai pada (a)  $\nabla \phi$ , (b)  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , (c)  $\nabla \times \mathbf{A}$  dalam sistem koordinat tegak-lurus.
71. Buktikan  $\iiint_V \nabla \phi \cdot \mathbf{A} \, dV = \iint_S \phi \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS - \iiint_V \phi \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$ .
72. Misalkan  $\mathbf{r}$  vektor posisi dari sebarang titik relatif terhadap sebuah titik asal  $O$ . Andaikan  $\phi$  memiliki turunan-turunan kontinu yang sekurang-kurangnya berorde dua dan misalkan  $S$  sebuah permukaan tertutup yang membatasi sebuah volume  $V$ . Nyatakan  $\phi$  di  $O$  oleh  $\phi_0$ . Perlihatkan bahwa

$$\iint_S \left[ \frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\nabla^2 \phi}{r} \, dV + \alpha$$

di mana  $\alpha = 0$  atau  $4\pi\phi_0$  sesuai dengan apakah  $O$  di luar ataukah di dalam  $S$ .

73. Potensial  $\phi(P)$  disebabkan oleh suatu sistem muatan-muatan (atau massa-massa)  $q_1, q_2, \dots, q_n$  yang memiliki vektor-vektor kedudukan  $r_1, r_2, \dots, r_n$  terhadap  $P$ , diberikan oleh

$$\phi = \sum_{m=1}^n \frac{q_m}{r_m}$$

Buktikan hukum Gauss

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$$

dimana  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  adalah intensitas medan listrik,  $S$  sebuah permukaan yang menutupi semua muatan-  
dan  $Q = \sum_{m=1}^n q_m$  adalah muatan total di dalam  $S$ .

74. Jika sebuah volume ruang  $V$  yang dibatasi oleh permukaan  $S$  memiliki distribusi muatan (atau massa) yang kontinu dengan kerapatan  $\rho$ , maka potensial  $\phi(P)$  disebabkan titik  $P$  didefinisikan oleh  $\phi = \iiint_V \frac{\rho dV}{r}$ .

Deduksikan hasil-hasil berikut di bawah anggapan-anggapan yang sesuai :

(a)  $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_V \rho dV$ , di mana  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ .

(b)  $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$  (persamaan Poisson) di semua titik  $P$  di mana terdapat muatan, dan  $\nabla^2\phi = 0$  (persamaan Laplace) di mana tidak terdapat muatan.